УДК 514.75

Н. В. Виноградова, О. В. Воротникова, М. В. Кретов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

О подклассах комплексов эллиптических цилиндров

Исследуются в трехмерном аффинном пространстве комплексы (трехпараметрические семейства) эллиптических цилиндров, у которых индикатриса первого координатного вектора описывает поверхность с касательной плоскостью, параллельной координатной плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Геометрически охарактеризованы характеристическое и фокальное многообразия образующих элементов рассматриваемых комплексов. Получены геометрические свойства исследуемых многообразий.

Ключевые слова: комплекс, репер, цилиндр, аффинное пространство, конгруэнция, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, индикатриса вектора.

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) Z_3^{ε} эллиптических цилиндров, изучение которых было начато ранее [1], в репере $r = \{A, \bar{e}_i\}$, $i, j, k = \overline{1,3}$, построенном в указанной работе.

Согласно статье [1] уравнение цилиндра q и система дифференциальных уравнений комплекса Z_3^{ε} соответственно имеют вид

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0; \tag{1}$$

$$\omega_1^1 = -\varepsilon\theta^1, \ \omega_1^3 = \varepsilon\lambda_{11}\theta^1, \ \omega^1 = \varepsilon\theta^1, \ \omega^2 = A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2,$$
$$\omega_2^3 = \omega_2^1 = \omega_3^3 = \omega_2^2 = \omega^3 = 0, \tag{2}$$

где

$$\theta^1 = \omega_3^1, \ \theta^2 = \omega_3^2, \ \theta^3 = \omega_1^2.$$

Рассмотрим подклассы комплексов Z_3^{ε}, когда индикатриса вектора $\bar{e}_1$ описывает поверхность с касательной плоскостью, параллельной координатной плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Так как $d\bar{e}_1 = -\varepsilon\theta^1\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2 + \varepsilon\lambda_{11}\theta^1\bar{e}_3$ для комплексов Z_3^{ε}, то выделяемых подклассов комплексов Z_3^{ε} с вышеуказанным свойством индикатрисы вектора $\bar{e}_1$ будет два: первый при $\varepsilon = 0$, второй при λ_{11}=0, которые обозначим символами $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$ соответственно.

Системы уравнений Пфаффа для комплексов $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$ соответственно будут иметь вид

$$\omega^2 = A_1^2\theta^1,\ \omega_1^1 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega_2^1 = \omega_3^3 = \omega_2^2 = \omega^3 = \omega^1 = 0; \quad (3)$$

$$\omega^2 = A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2,\ \omega_1^1 = -\omega^1,\ \omega_1^3 = \theta^1,\ \omega^1 = \alpha\theta^1,$$
$$\omega_2^3 = \omega_2^1 = \omega_3^3 = \omega_2^2 = \omega^3 = 0. \quad (4)$$

Анализируя системы дифференциальных уравнений (3) и (4) в соответствии с методикой, содержащейся в работе [2], убеждаемся в том, что комплексы $\hat{Z}_1$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента, а комплексы $\hat{Z}_2$ — с произволом одной функции двух аргументов.

Характеристическое многообразие [3] цилиндра q задается системой уравнений

$$F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, \quad (5)$$

где F_k удовлетворяют уравнению $-\dfrac{1}{2}dF = F_k\theta^k$.

Для комплексов $\hat{Z}_1$ система уравнений (5) имеет вид

$$x^1x^3 + A_1^2x^2 = 0,\ x^2x^3 = 0,\ x^1x^2 = 0, \quad (6)$$

а для комплексов $\hat{Z}_2$ эта система выглядит следующим образом:

$$-\alpha(x^1)^2 + \alpha x^1 + x^1x^3 + A_1^2x^2 = 0,\ x^2(x^3 - \varepsilon) = 0,\ x^1x^2 = 0. \quad (7)$$

Из систем (6) и (7) вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Характеристическое многообразие [3] цилиндра, описывающего комплекс* $\hat{Z}_1$, *состоит из двух координатных осей* $(A, \bar{e}_1)$ *и* $(A, \bar{e}_3)$, *а описывающего комплекс* $\hat{Z}_2$ *состоит из координатной оси* $(A, \bar{e}_3)$ *и прямой, проходящей через точки (1, 0, 0) и (0, 0,* $-\alpha$*).*

Фокальное многообразие [3] цилиндра, описывающего комплексы $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$, задаются соответственно системами уравнений (6) и (7) с добавленном в каждой системе уравнений выражения (1).

Из определений фокальных многообразий цилиндра, описывающего исследуемые многообразия, следует

Теорема 2. *Фокальное многообразие [3] цилиндра, описывающего комплекс* $\hat{Z}_1$, *состоит из двух точек, являющихся концами векторов* $\bar{e}_1$ *и* $-\bar{e}_1$, *а описывающего комплекс* $\hat{Z}_2$ *состоит из конца вектора* $\bar{e}_1$ *и конца вектора с координатами (–1, 0,* -2α*).*

Обозначая через A_i — концы векторов $\bar{e}_i$, M_i — текущие точки координатных осей $(A, \bar{e}_i)$, M_{3+i} — текущие точки координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ соответственно, для комплексов $\hat{Z}_1$ получаем

$$\begin{gathered}
dA = A_1^2\theta^1\,\bar{e}_2,\ d\bar{e}_1 = \theta^3\bar{e}_2,\ d\bar{e}_2 = 0,\ d\bar{e}_3 = \theta^1\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2,\\
dA_1 = (A_1^2\theta^1 + \theta^3)\bar{e}_3,\ dA_2 = A_1^2\theta^1\bar{e}_2,\\
dA_3 = \theta^1\bar{e}_1 + (A_1^2\theta^1 + \theta^2)\bar{e}_2,\\
dM_1 = dx^1\bar{e}_1 + (A_1^2\theta^1 + x^1\theta^3)\bar{e}_2,\\
dM_2 = (A_1^2\theta^1 + dx^2)\,\bar{e}_2,\\
dM_3 = x^3\theta^1\bar{e}_1 + (A_1^2\theta^1 + x^3\theta^2)\bar{e}_2 + dx^3\bar{e}_3,\\
dM_4 = dx^1\cdot\bar{e}_1 + (dx^2 + x^1\theta^3 + A_1^2\theta^1)\,\bar{e}_2,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$dM_5 = (dx^1 + x^3\theta^1)\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 + x^1\theta^3 + x^3\theta^2)\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3,$$
$$dM_6 = x^3\theta^1\overline{e}_1 + (dx^2 + A_1^2\theta^1 + x^3\theta^2)\,\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3.$$

Для комплексов $\hat{Z}_2$ формулы (8) будут иметь вид

$$\begin{gathered}
dA = \alpha\theta^1\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2)\overline{e}_2,\ \ d\overline{e}_1 = -\alpha\theta^1\overline{e}_1 + \theta^3\overline{e}_2 + \theta^1\overline{e}_3,\\
d\overline{e}_2 = 0,\ \ d\overline{e}_3 = \theta^1\overline{e}_1 + \theta^2\overline{e}_2,\\
dA_1 = (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 + \theta^3)\overline{e}_2 + \theta^1\overline{e}_3,\\
dA_2 = \alpha\theta^1\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2)\overline{e}_2,\\
dA_3 = (\alpha+1)\theta^1\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 + \theta^2)\overline{e}_2,\\
dM_1 = (dx^1 + \alpha\theta^1 - \alpha x^1\theta^1)\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 + x^1\theta^3)\overline{e}_2 + x^1\theta^1\overline{e}_3,\\
dM_2 = \alpha\theta^1\overline{e}_1 + (dx^2 + A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2)\,\overline{e}_2,\\
dM_3 = (\alpha\theta^1 + x^3\theta^1)\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 + x^3\theta^2)\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3,\\
dM_4 = (dx^1 + \alpha\theta^1 - \alpha x^1\theta^1)\overline{e}_1 + (dx^2 + A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 +\\
+ x^1\theta^3)\overline{e}_2 + x^1\theta^1\overline{e}_3,\\
dM_5 = (dx^1 + \alpha\theta^1 - \alpha x^1\theta^1 + x^3\theta^1)\,\overline{e}_1 + (A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 +\\
+ x^1\theta^3 + x^3\theta^2)\,\overline{e}_2 + (dx^3 + x^1\theta^1)\,\overline{e}_3,\\
dM_6 = (\alpha\theta^1 + x^3\theta^1)\,\overline{e}_1 + (dx^2 + A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2 + x^3\theta^2)\,\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3.
\end{gathered} \tag{9}$$

Анализируя и дифференцируя формулы (8) и (9), получаем теоремы.

Теорема 3. *Комплексы $\hat{Z}_1$ обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) индикатриса вектора $\overline{e}_2$, координатная прямая $(A, \overline{e}_2)$ и координатная плоскость $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ неподвижны;

2) индикатриса вектора $\overline{e}_1$ и центр луча прямолинейной конгруэнции осей цилиндра описывают однопараметрические семейства линий с касательными, параллельными вектору $\overline{e}_2$;

3) индикатриса вектора $\overline{e}_3$, *точки координатных прямых* $(A, \overline{e}_1)$ *и* $(A, \overline{e}_3)$ *описывают конгруэнции плоскостей, параллельных координатной плоскости* $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$.

Теорема 4. *Комплексы* $\hat{Z}_2$ *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) индикатриса вектора $\overline{e}_2$ *неподвижна;*

2) центр луча прямолинейной конгруэнции осей цилиндра, индикатриса вектора $\overline{e}_3$, *точки координатных прямых* $(A, \overline{e}_2)$ *и* $(A, \overline{e}_3)$ *описывают конгруэнции цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными вектору* $\overline{e}_2$ *;*

3) точки координатной прямой $(A, \overline{e}_1)$ *описывают комплексы цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными вектору* $\overline{e}_2$.

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы эллиптических цилиндров // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 54—59.

2. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

3. *Малаховский В.С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

N. Vinogradova, O. Vorotnikova, M. Kretov

About subclasses of complexes of elliptical cylinders

In three-dimensional affine space research of complexes (three-parametric families) of elliptical cylinders at which the indicatrix of the first coordinate vector describes a surface with the tangent plane parallel coordinate plane of $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ proceeds. Characteristic and focal varieties of forming elements for considered complexes are geometrically described. Geometrical properties of researched varieties are obtained.